

Mathématiques : 1Bac SM

Séance 8-1 : Trigonométrie (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Formules de transformation de base

1-1/ Formules d'addition

1-2/ Transformation de $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$ - Formules de linéarisation

1-3/ Formules de $\cos(a)$, $\sin(a)$ et $\tan(a)$ en fonction de $\tan\left(\frac{a}{2}\right)$

II- Transformation de produits en sommes

III- Transformation de sommes en produits

IV- Transformation de l'expression $a \cos(x) + b \sin(x)$

I- Formules de transformation de base

1-1/ Formules d'addition

Proposition

Soit a et b deux nombre réels.

On a les formules suivantes :

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

Applications

1. En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

2. Calculer $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

3. Établir les égalités suivantes :

$$\boxed{1} \quad \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$$

$$\boxed{2} \quad \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\boxed{3} \quad \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\boxed{4} - \sqrt{6} \cos x - \sqrt{2} \sin x = 2\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{5\pi}{6} \right)$$

Proposition

Soit a et b deux nombre réels tels que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a les formules suivantes :

- Si $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors : $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$

- Si $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors : $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$

Applications

1. En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\tan \frac{5\pi}{12}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ et $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

2. Simplifier $\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$.

1-2/ Transformation de $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$ - Formules de linéarisation

Proposition

Soit a et b deux nombre réels.

On a les formules suivantes :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$

- $\sin(2a) = 2 \sin a \cdot \cos a$

- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$ et $\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$ et $\tan^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}$

- Si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $2a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors : $\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

Remarques

On a pour tout réel a :

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \left(\frac{a}{2} \right) ; \quad 1 - \cos a = 2 \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right)$$

$$\sin a = 2 \cos \left(\frac{a}{2} \right) \sin \left(\frac{a}{2} \right)$$

On rappelle que pour tout réel a , on a : $\sin a = \cos \left(\frac{\pi}{2} - a \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} + a \right)$

Applications

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Établir les égalités suivantes :

$$\boxed{1} \quad 1 + \sin x = \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2$$

$$\boxed{2} \quad 1 + \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2$$

$$\boxed{3} \quad 2 \sin x + \sin(2x) = 8 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cdot \cos^3 \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$\boxed{4} \quad 1 - \cos x + \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$$

$$\boxed{5} \quad 1 + \cos x - \sin x = 2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Soit α un réel tel que : $\sin \alpha \neq -1$

2. Montrer que : $\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel tel $x \neq k\pi$ que pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

3. Montrer que $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$ et $\sin x = (1 + \cos x) \tan \frac{x}{2}$.

1-3/ Formules de $\cos(a)$, $\sin(a)$ et $\tan(a)$ en fonction de $\tan\left(\frac{a}{2}\right)$

Proposition

Soit a un nombre réel tel que $a \neq \pi + 2k\pi$ et $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On pose : $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$

On a : $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$

Applications

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\tan x = 2$

1. Calculer $\cos(2x)$, $\sin(2x)$ et $\tan(2x)$.

Soit x un nombre réel tel que $x \neq \pi + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On pose $t = \tan \frac{x}{2}$

2. Montrer que $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = t^2$ et $\frac{\sin x}{1+\cos x} = t$.

Soit a et b deux réels de l'intervalle $]0 : \frac{\pi}{2}[$.

3. Prouver les inégalités suivantes :

$$\boxed{1} \quad 1 + \frac{1}{\tan a} < \frac{1}{\tan \frac{a}{2}}$$
$$\boxed{2} \quad \tan\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\tan a + \tan b}{2}$$

(Indication : on pourra poser $x = \tan \frac{a}{2}$ et $y = \tan \frac{b}{2}$).

II- Transformation de produits en sommes

Proposition

Soit a et b deux nombre réels.

On a les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \\ \sin a \cdot \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos a \cdot \sin b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]\end{aligned}$$

Applications

1. Écrire sous forme de sommes les produits suivants :

$$\begin{aligned}A(x) &= \cos x \cdot \cos(5x) \\ B(x) &= \sin(3x) \cdot \sin(4x) \\ C(x) &= \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

III- Transformation de sommes en produits

Proposition

Soit p et q deux nombre réels.

On a les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \cos \left(\frac{p+q}{2} \right)\end{aligned}$$

Applications

1. Écrire sous forme d'un produit les sommes suivantes :

$$\begin{aligned}A(x) &= \sin x + \sin(2x) + \sin(3x) \\ B(x) &= 1 + \cos x + \cos(2x) + \cos(3x) \\ C(x) &= 1 + \sin(2x) - \cos(2x) \\ D(x) &= \sin x + \sin(5x) + \sin(7x)\end{aligned}$$

2. a- Écrire sous forme de produit l'expression $\cos x + \cos(2x)$ où $x \in \mathbb{R}$.

2. b- En déduire les solutions dans \mathbb{R} de l'équation : $\cos x + \cos(2x) = 0$

2. c- Résoudre dans l'intervalle $[0; \pi]$ l'inéquation : $\cos x + \cos(2x) \geq 0$

3. a- Factoriser l'expression $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x)$ où $x \in \mathbb{R}$.

3. b- Résoudre dans l'intervalle $[-\pi; 0]$ l'inéquation :

$$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) < 0$$

4. a- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin(3x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

4. b- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\sin x + 2 \sin(3x) - \sqrt{3} \cos x = 0$

4. c- Résoudre dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation : $\sin x + 2 \sin(3x) - \sqrt{3} \cos x \leq 0$

IV- Transformation de l'expression $a \cos(x) + b \sin(x)$

Proposition

Soit a et b deux nombre réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$.

Alors il existe un réel α tel que $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$ avec $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Applications

1. Mettre les expressions suivantes sous forme de $\rho \cos(\omega x + \varphi)$:

$$\begin{aligned}A(x) &= \cos(2x) + \sin(2x) \\ B(x) &= \cos x - \sqrt{3} \sin x \\ C(x) &= 3 \cos \frac{x}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{x}{2}\end{aligned}$$

2. a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

2. b- En déduire les solutions dans \mathbb{R} de l'équation : $\cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) = 1$

2. c- Résoudre dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation : $\cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) \geq 1$

3. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi; 2\pi[$ l'inéquation : $\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \geq -1$